

с 596-602

УДК 539.3

В. И. МОССАКОВСКИЙ, В. В. ПЕТРОВ, А. В. СЛАДКОВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОСКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ СЖАТИИ И СДВИГЕ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА ЖЕСТКИМИ ПЛИТАМИ

Одним из наиболее существенных факторов при контактном взаимодействии упругих тел является микроскольжение — появление в контактной зоне участков сцепления и относительного проскальзывания. Известно, что микроскольжение влияет на процесс трения и износа контактирующих тел, поэтому для их исследования необходимо определить количество и расположение возникающих зон микроскольжения, влияющие механические свойства материалов, шероховатости поверхности и других факторов на микроскольжение. Целью проведенной работы было апробирование приближенной численной методики решения контактных задач теории упругости с трением на известных, сравнительно простых постановках, имеющих точное решение, которое подтверждено экспериментально. Получены новые результаты для сдвига упругого прямоугольника жесткими плитами.

Проведенные исследования были направлены по пути наибольшей схематизации расчетов, для чего исследуемая область была взята максимально простой — прямоугольной, из контактирующих тел — одно жесткое, физические соотношения — плоское деформированное состояние в упругой области, закон трения Амонтона — Кулона. Однако такая схема удобна тем, что совпадает с экспериментальными [1, 2] в частном случае чистого сжатия, с теоретической [3] и численной (метод конечных разностей) [2] также для сжатия. Таким образом, полученное решение для общего случая одновременного сжатия и сдвига («комого» сдвига) по аналогии с простым путем нагружения в теории пластичности можно тестировать на приведенных выше известных работах.

Постановка задачи. Для решения поставленной задачи был применен метод конечных элементов (МКЭ) — высокоэффективный численный метод, с успехом применяемый для решения подобных контактных задач [4]. На рис. 1 показана схема нагружения и конечноэлементной дискретизации прямоугольной области $ABCD$.

В результате одновременного действия усилий P и T (нормального и касательного соответственно) прямоугольник $ABCD$ деформируется на величину сжатия Δ_y и сдвига Δ_x . Усилия передаются на стороны AB и CD с помощью жестких плит. Грани AC и BD свободны от нагрузок, и на них принимаются соответствующие граничные условия

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \emptyset \quad \text{при } \{x\} \in AC \cup BD, \quad (1)$$

где p_1, p_2 — касательные и нормальные поверхностные напряжения в точке, определенной вектором $\{x\} = \{x, y\}$. Сторона CD считается

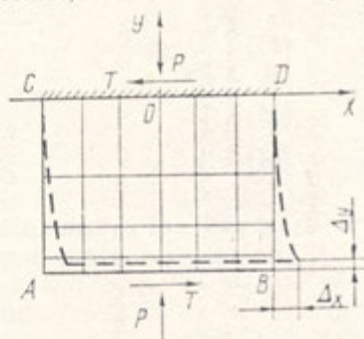
жестко заделанной (применяется граничное условие полного сцепления):

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \emptyset \quad \text{при } \{x\} \in CD. \quad (2)$$

Контактные явления рассматриваются на нижнем основании AB . Здесь допускается существование зон сцепления, относительного проскальзывания и отрыва, поэтому граничные условия записываются неоднозначно. В зонах сцепления имеем

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Рис. 1. Схема нагружения и конечноэлементная дискретизация прямоугольной области



и дополнительные условия

$$p_2 < 0, \quad (4)$$

$$|p_1| < \mu |p_2|. \quad (5)$$

Неравенство (4) является условием того, что в зонах сцепления нормальные напряжения сжимающие во избежание отрыва. Это условие будет справедливо также и в зонах скольжения. Неравенство (5) вытекает из закона трения Амонтона — Кулона.

В зонах проскальзывания справедливо одно из условий (3)

$$v = \Delta_y, \quad (6)$$

закон трения

$$p_1 = \text{sign}(S) \mu p_2, \quad (7)$$

и также, как уже отмечалось, неравенство (4). Функция $\text{sign}(S) = \pm 1$ указывает знак относительного проскальзывания в направлении действия касательных напряжений.

В зонах отрыва выполняется условие (1) и неравенство

$$v > \Delta_y, \quad (8)$$

аналогичное соотношению (6).

Для определения неизвестных смещений Δ_x и Δ_y записываем дополнительные соотношения

$$\int_{AB} p_1 dx = T, \quad \int_{AB} p_2 dx = P, \quad (9)$$

являющиеся соотношениями статики.

Решение задачи по МКЭ. Перейдем к конечноэлементной постановке задачи. Прямоугольная область $ABCD$ покрывается прямоугольной сеткой, которая сгущается с приближением к основанию AB , как показано на рис. 1. Для подобной дискретизации найдем с помощью [5] матрицу жесткости $[K]$ и вектор узловых сил $\{R\}$. Таким образом, в обозначениях работы [5] для вектора перемещений $\{\Delta\}$ имеем систему уравнений

$$[K] \{\Delta\} = \{R\} \quad (10)$$

порядка n , где n — удвоенное число узлов сетки. Матричное уравнение (10) можно записать и в другом виде:

$$\sum_{j=1}^n K_{mj} \Delta_j = R_m, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Граничное условие (1) приводится к виду

$$\begin{cases} R_{2i-1} = 0, \\ R_{2i} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где i — номер узла, принадлежащего боковым граням таким образом, что $\{x_i\} \in AC \cup BD$; R_{2i-1} — узловая сила в направлении оси x — аналог напряжения p_1 ; R_{2i} соответствует p_2 .

Условие (2) переписывается как

$$\begin{cases} \Delta_{2i-1} = 0 \\ \Delta_{2i} = 0 \end{cases} \quad \text{при } \{x_i\} \in CD. \quad (13)$$

Аналогично соотношению (3) и дополнительные условия (4), (5) имеют вид

$$\begin{cases} \Delta_{2i-1} = \Delta_x, \\ \Delta_{2i} = \Delta_y, \end{cases} \quad (14)$$

$$R_{2i} > 0, \quad (15)$$

$$|R_{2i-1}| < \mu |R_{2i}|. \quad (16)$$

Знак неравенства (15) изменен на противоположный, так как на контактной площадке AB сжимающим напряжениям соответствуют положительные узловые силы.

В зонах проскальзывания вместо (6) и (7) имеем

$$\Delta_{2i} = \Delta_y, \quad (17)$$

$$R_{2i-1} = \text{sign}(S) \mu R_{2i}. \quad (18)$$

И наконец, вместо (8) и (9) получим

$$\Delta_{2i} > \Delta_y, \quad (19)$$

$$\sum_{\{x_i\} \in AB} R_{2i-1} = T, \quad \sum_{\{x_i\} \in AB} R_{2i} = P. \quad (20)$$

Таким образом, имеем систему линейных алгебраических уравнений порядка n (11), в которой если узел i является граничным, то $2i-1$ и $2i$ уравнения заменяются соответствующей парой граничных условий типа (12) — (14), (17), (18). Данная система содержит n неизвестных узловых перемещений Δ_i и смещений Δ_x, Δ_y . Поэтому она дополняется для полноты двумя уравнениями (20). Возможна постановка задачи, когда одно из смещений Δ_x или Δ_y , а также оба могут быть заданы. Тогда порядок системы будет $n+1$ или n соответственно. Помимо системы уравнений, имеем также набор неравенств (15), (16), (19), которые применяются для нахождения границ зон.

Неизвестные R_i не являются независимыми, и их можно исключить из уравнений. Например, уравнение (18) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^n (K_{2i-1,j} - \text{sign}(S) \mu K_{2i,j}) \Delta_j = 0, \quad (21)$$

а соотношения (20) переписываются как

$$\sum_{\{x_i\} \in AB} \sum_{i=1}^n K_{2i-1,i} \Delta_i = T, \quad (22)$$

$$\sum_{\{x_i\} \in AB} \sum_{i=1}^n K_{2i,i} \Delta_i = P. \quad (23)$$

Окончательно получаем систему уравнений в перемещениях с набором неравенств. Однако заранее неизвестно расположение и размер зон микроскольжения и отрыва, метод перебора в данном случае неприменим. Поэтому разработан новый итерационный алгоритм поиска зон.

Первоначально решается задача с полным сцеплением. Если в решении существуют контактные узлы, в которых узловые силы (реакции связей) отрицательны, а значит, напряжения положительны (растягивающие), то среди этих точек ищется узел с максимальным растягивающим напряжением и в нем полагаются условия отрыва. Далее процесс повторяется: решение задачи, поиск точки $\min R_{2i}$, задание условия отрыва и т. д.

В том случае, если зоны отрыва найдены или их не существует, происходит поиск зон микроскольжения. В предыдущем решении определим узел i с максимальным отношением $|R_{2i-1}/R_{2i}| = \mu^0$. Считаем, что в нем начинается скольжение и задаем граничное условие (проскальзывание) с коэффициентом трения $\mu = \mu^0$. Полученная при этом матрица $[K]$ системы эквивалентна существовавшей до этого, следовательно, решение не изменяется. Далее находится точка $j \neq i$ с $\max |R_{2j-1}/R_{2j}| = \mu^1$. В этой точке задается условие проскальзывания с $\mu = \mu^1$. В узле i задается то же условие. Таким образом, осуществляется плавное понижение коэффициента μ ($\mu^0 > \mu^1$), которое не приводит к разбросу в решениях $\{\Delta\}^k$. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока $\mu^k \approx \mu^*$. Тогда можно утверждать, что $\{\Delta\}^k$ — решение задачи с микроскольжением, а набор узлов, в которых достигнут коэффициент $\mu^k = \mu^*$, — зоны микроскольжения.

Отметим также, что на каждом этапе поиска зон микроскольжения происходит проверка на отрыв. Если в каком-то новом контактном узле i будет получено $R_{2i} < 0$, то поступаем, как описано выше. Если же, напротив, в точке, в которой ранее было отставание, появились перемещения в нормальном направлении меньше, чем Δ_p , то снова задаем в ней условие сцепления.

Такая математическая постановка поиска зон микроскольжения имеет физическую интерпретацию. Микроскольжение начинается в точке, в которой отношение касательного и нормального напряжений максимально. При скольжении это отношение уменьшается до тех пор, пока не будет равно отношению в следующей точке. Затем проскальзывают две точки и т. д. Скольжение продолжается до тех пор, пока не будет достигнут коэффициент трения скольжения для данной пары тел.

Результаты исследований. Было исследовано сжатие и сдвиг упругого квадрата со следующими параметрами: размер сторон $AB = AC = 0,05$ м, модуль упругости $E = 0,49 \cdot 10^7$ Н/м², а также прямоугольника $AB = 0,05$ м, $AC = 0,03$ м, $E = 0,98 \cdot 10^7$ Н/м². Коэффициент Пуассона ν ,

коэффициент трения μ , величины нормального P и сдвигающего T усилий (сжатия Δy и сдвига Δx) варьировались. Особо исследовался случай при $\nu \approx 0,5$ (0,48). Подобные размеры и свойства материалов выбраны таким образом, чтобы они соответствовали резиновому параллелепипеду (резинометаллические амортизаторы). В контактной зоне рассматривалось от 25 до 49 узлов.

На рис. 2, а представлено распределение нормальных $p(x)$ и касательных $q(x)$ контактных напряжений при сжатии и сдвиге без микро-

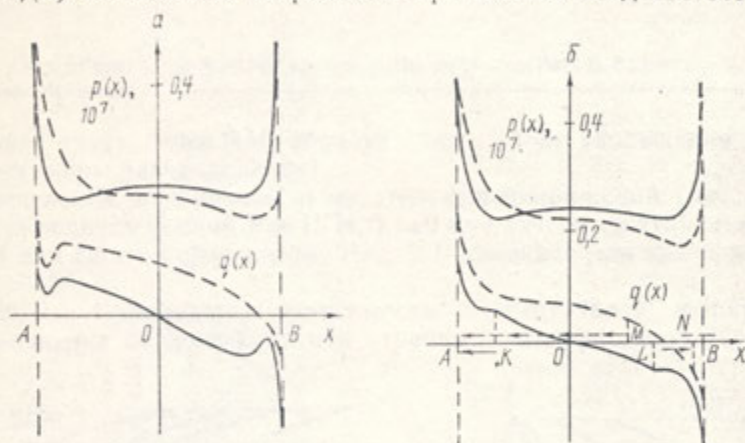


Рис. 2. Распределение нормальных и касательных контактных напряжений (Па) при сжатии (сплошные линии) и сдвиге (штриховые) без микроскольжения (а) и при наличии микроскольжения (б)

скольжения. Нормальные напряжения больше, чем касательные, для небольших сдвиговых усилий, поэтому кривые распределений нормальных напряжений $p(x)$ выше на рисунке. Распределения сжатия $p(x)$ симметричны, а $q(x)$ — кососимметричны относительно оси ординат, при приближении к краю контакта резко возрастают, что соответствует теоретической бесконечности. Локальный максимум нормальных напряжений достигается в центре контакта. Касательные напряжения имеют у левого края довольно резкий локальный минимум, что обусловлено краевым эффектом. При сдвиге происходит «перекос» нормальных напряжений, причем при возрастании величины сдвигающего усилия возможно появление в окрестности точки B зоны отрыва, что и было получено. Касательные напряжения возрастают по отношению к распределению чистого сжатия таким образом, чтобы обеспечилось условие (22).

Представленные на рис. 2, б распределения аналогичны рис. 2, а с тем отличием, что допускается существование зон микроскольжения. Их появление практически не оказывает влияния на распределение нормальных напряжений, а для распределений касательных напряжений за счет проскальзывания исчезают краевые эффекты, в точках стыка зон происходит излом кривых. На рис. 2, б изображен трехзонный случай микроскольжения как при сжатии (зоны скольжения AK и LB и сцепления KL), так и при сдвиге (зоны скольжения AM и NB и сцепления MN). Стрелками показано направление проскальзывания. Вследствие краевого эффекта возможно возникновение внутри контактной площадки вблизи края A внутренней зоны проскальзывания при небольших значениях касательного усилия — начало сдвига (пятизонный случай). Направление скольжения в этой зоне то же, что и в зоне AM . При возрастании сдвигающего усилия внутренняя зона скольжения смыка-

ется с зоной скольжения AM , образуя одну зону скольжения (получается трехзонное распределение).

Распределение нормальных и касательных напряжений (рис. 2) получены для величин усилий $P=13$ Н, $T=0$ при чистом сжатии; $P=13$ Н, $T=2,55$ Н при сжатии со сдвигом. Рис. 2, б приведен для коэффициента трения $\mu=0,25$.

На рис. 3 и 4 приведены зависимости относительной ширины зон микроскольжения от коэффициента трения и коэффициента Пуассона

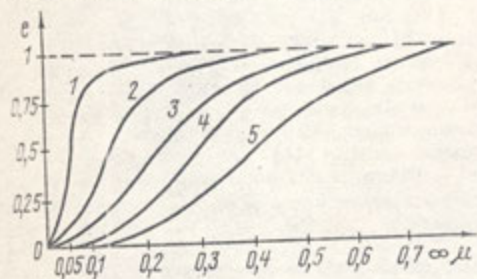


Рис. 3. Зависимость относительной ширины зон микроскольжения от коэффициента трения при $\nu=\text{const}$ (сжатие): 1 — $\nu=0,05$; 2 — 0,15; 3 — 0,25; 4 — 0,35; 5 — 0,45

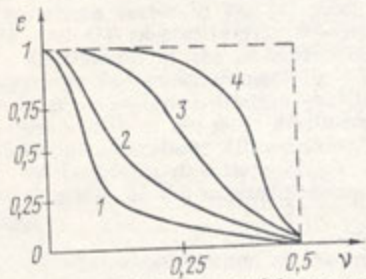


Рис. 4. Зависимость относительной ширины зон микроскольжения от коэффициента Пуассона при $\mu=\text{const}$ (сжатие): 1 — $\mu=0,05$; 2 — 0,1; 3 — 0,2; 4 — 0,4

при чистом сжатии. Положим, что координата точки L $x=a$, а точки B $x=b$, тогда для сжатия относительная ширина $e=a/b$, при сдвиге аналогично $e=ML/AB$. Как видно из рис. 3, при возрастании коэффициента трения увеличивается удельный вес зоны сцепления в общем распределении зон. При $\mu \rightarrow \infty$ $e \rightarrow 1$ и, наоборот, при $\mu \rightarrow 0$ $e \rightarrow 0$. Кривые приведены при различных коэффициентах Пуассона. Данные кривые хорошо соответствуют полученным в работе [2] методом конечных разностей.

Коэффициент Пуассона ν , как видно из рис. 4, оказывает обратное действие. При $\nu \rightarrow 0,5$ $e \rightarrow 0$ и, наоборот, при $\nu \rightarrow 0$ $e \rightarrow 1$. Кривые приводятся для различных коэффициентов трения.

Для сдвига подобные зависимости приведены на рис. 5, однако в качестве параметра используется отношение T/P — наиболее существенный фактор, влияющий на микроскольжение. Кривые получены для различных коэффициентов трения при постоянном коэффициенте Пуассона $\nu=0,15$ и величине сжатия $\Delta_y=10^{-5}$ м. Ось OY соответствует случаю чистого сжатия. Как видно из рисунка, для каждого коэффициента трения μ при $T/P \rightarrow \mu$ $e \rightarrow 0$, что вполне закономерно. Кривые равного сдвига выполнены штриховыми.

Также был исследован вопрос о влиянии микроскольжения на жест-

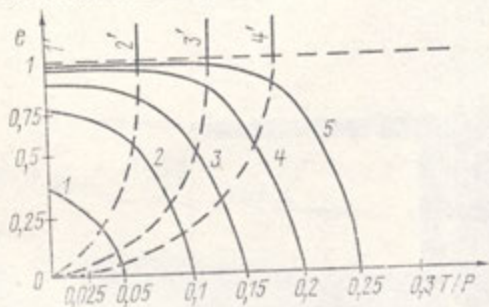


Рис. 5. Зависимость относительной ширины зон микроскольжения от отношения силовых факторов при $\nu=0,15$, $\Delta_y=10^{-5}$ м (косой сдвиг): 1 — $\mu=0,05$; 2 — 0,1; 3 — 0,15; 4 — 0,2; 5 — 0,25; 1' — $\Delta_x=0$; 2' — $0,1 \cdot 10^{-5}$ м; 3' — $0,2 \cdot 10^{-5}$ м; 4' — $0,4 \cdot 10^{-5}$ м

кость прямоугольника. Рассмотрены зависимости величины нормального усилия, необходимого для достижения заданного сжатия, от коэффициента трения (при $\mu=0,2$ и $\mu=\infty$). Определено, что при $\nu>0,4$ наличие микроскольжения существенно уменьшает жесткость, например при $\nu=0,45$ и одной величине сжатия Δ_y отношение $P_{(\mu=\infty)}/P_{(\mu=0,2)}$ равно 1,33. Таким образом, для материалов, по своим физическим свойствам близких к резинам, необходимо учитывать в подобных задачах явление микроскольжения.

Обозначения

$\{0\}$ — нулевой вектор; $\{ \}$ — вектор; $[\]$ — матрица; $\{x\}$ — вектор точки с координатами x, y ; $\{u\}$ — вектор перемещений $\{x\}$ -точки с компонентами u и v (в направлении осей OX и OY); $\{p\}$ — вектор поверхностных напряжений в $\{x\}$ -точке с компонентами p_1 и p_2 (в направлении осей OX и OY); P — нормальное усилие сжатия; T — касательное усилие сдвига; $p(x)$ — распределение нормального давления; $q(x)$ — распределение касательного давления; Δ_y — сжатие; Δ_x — сдвиг; μ — коэффициент трения; μ^i — коэффициент трения при i -итерации; μ^* — заданный коэффициент трения; $[K]$ — матрица жесткости с компонентами K_{ij} ; $\{\Delta\}$ — вектор узловых перемещений с компонентами Δ_i ; $\{\Delta\}^i$ — вектор узловых перемещений при i -итерации; $\{R\}$ — вектор узловых сил с компонентами R_i ; $\text{sign}(S)$ — функция направления микроскольжения; E — модуль упругости первого рода; ν — коэффициент Пуассона; e — относительная ширина зон микроскольжения.

Nomenclature

$\{0\}$ — zero vector; $\{ \}$ — vector; $[\]$ — matrix; $\{x\}$ — the vector of the point with coordinates x, y ; $\{u\}$ — displacement vector of the $\{x\}$ -point with components u and v (with regard to the axes OX and OY); $\{p\}$ — surface-stress vector in the $\{x\}$ -point with components p_1 and p_2 (with regard to the axes OX and OY respectively); P — normal compressive force; T — contact shear force; $p(x)$ — distribution of the normal pressure; $q(x)$ — distribution of the shear stresses; Δ_y — squeezing; Δ_x — displacement; μ — friction coefficient; μ^i — friction coefficient at i -iteration; μ^* — assigned friction coefficient; $[K]$ — stiffness matrix with components K_{ij} ; $\{\Delta\}$ — the vector of the node displacements with components Δ_i ; $\{\Delta\}^i$ — node displacement vector at i -iteration; $\{R\}$ — node forces vector with components R_i ; $\text{sign}(S)$ — function of the microslip direction; E — Young's modulus of elasticity; ν — Poisson's ratio; e — relative width of the microslip zones.

Figure Captions

Fig. 1. The scheme of the loading and the finite element discretization of the rectangular area.

Fig. 2. Distributions of normal and shear contact stresses (Pa) at squeezing (solid) and displacement (dashed lines) without (a) and with microslip (b).

Fig. 3. The dependence of the relative width of microslip zones on the coefficient of friction when $\nu=\text{const}$ (squeezing).

Fig. 4. The dependence of the relative width of microslip zones on the Poisson's ratio when $\mu=\text{const}$ (squeezing).

Fig. 5. The dependence of the relative width of microslip zones on the force factors ratio when $\nu=0,15$, $\Delta_y=10^{-5}$ m (oblique displacement).

Summary

The finite element analysis was applied to the study of microslip on the contact surface of an elastic rectangle as it was subjected to squeezing and displacement by rigid plates. The location and size of the adhesion and slip zones have been defined depending upon various mechanical factors.

Литература

1. Моссаковский В. И., Петров В. В. О влиянии трения на микроскольжение.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3, с. 603—606.

2. Петров В. В., Сохач Ю. В. Микроскольжение на контактных поверхностях сжатых упругих тел.— В сб.: Актуальные проблемы мех. деформ. сред. Днепропетровск: ДГУ, 1979, с. 162—167.

3. Prasad S. N., Dasgupta S. Effect of Sliding Friction on Contact Stresses in a Rectangle Compressed by Rigid Planes.— J. of Appl. Mech., 1975, E42, N 3, p. 656—662.

4. Satoshi Ohte. Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems.— Bull. of the JSME, 1973, vol. 16, N 95, p. 797—804.

5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.—544 с.

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени

государственный университет

им. 300-летия воссоединения Украины с Россией

28.12.81.