

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ

ZESZYTY NAUKOWE
KATEDRY MECHANIKI STOSOWANEJ

**XLIII
SYMPOZJON
PTMTS**

**MODELOWANIE
W
MECHANICE**

GLIWICE 2004

**23
2004**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
WYDZIAŁ MECHANICZNY TECHNOLOGICZNY
KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ

ZESZYTY NAUKOWE
KATEDRY MECHANIKI STOSOWANEJ

zeszyt nr 23

XLIII
SYMPOZJON
PTMTS

MODELOWANIE
W
MECHANICE

9 - 13 LUTEGO 2004

GLIWICE 2004

44. Ładyżyńska-Kozdraś E.: Modelowanie niesymetrycznego odpalenia rakiety z manewrującego samolotu.....	273
45. Mańka A., Helka A., Klein W.: Badania stanowiskowe kompozytowych klocków hamulcowych	281
46. Mańka I., Tejszerska D.: Modelowanie skrzywień bocznych kręgosłupa	287
47. Maryniak J., Ładyżyńska-Kozdraś E., Folte U.: Modelowanie procesu katapultowania się pilota z samolotu w sytuacji awaryjnej.....	293
48. Matej J.: Hamowanie długiego składu wagonów bimodalnych na torze zakrzywionym	301
49. Milewski J., Miller A.: Model of solid oxide fuel cell	309
50. Miszczak A.: Korekty parametrów eksploatacyjnych dla lepkośćprężystych ferrosmarów	315
51. Miszczak A.: Siły nośne w stawach biodrowych człowieka podczas niestacjonarnych obciążeń impulsowych	321
52. Niemiec K., Sibilski K.: Modelowanie wpływu obciążeń eksploatacyjnych na pracę wybranych zespołów układu hydraulicznego śmigłowca.....	327
53. Paczos P., Zielnica J.: Stateczność ortotropowych dwuwarstwowych powłok stożkowych.....	333
54. Palacz M., Ostachowicz W., Krawczuk M.: Detekcja uszkodzeń w kratownicy kompozytowej z zastosowaniem sprzężonych fal giętno – ścinających	339
55. Pawlak M.: Aerodynamic forces in model of wind turbine's blade.....	345
56. Potkova P., Nawrat Z.: Opracowanie projektu narzędzia chirurgicznego będącego elementem telemanipulatora chirurgicznego.....	351
57. Rabijasz M.: Badania nad zastosowaniem systemu klasyfikatorów do optymalizacji kratownicy.....	357
58. Skrzypczyk J.: Metody perturbacyjne - nowa arytmetyka.....	363
59. Skrzypczyk J., Liszka T.: Zastosowania metody perturbacji do oszacowania wartości własnych układów dynamicznych o parametrach niepewnych	369
60. Śladkowski A., Sitarz M., Śladkowski J.: Analiza stanu naprężeń zębów kół przekładni za pomocą MES	375
61. Sobczak Ł., Okulik T., Grudziński K.: Modelowanie i obliczanie stanu montażowego w połączeniu wciskowym wałka z tulejką dla układu przestrzennego	381
62. Sobota G., Tejszerska D., Nawrat Z.: Symulacja komputerowa laparoskopowej operacji kardiochirurgicznej z zastosowaniem urządzeń zewnętrznych (mysz, klawiatura, ekran).....	387
63. Sokółowski A.: Korekcja błędów pozycji ściernicy powodowanych odkształceniami termicznymi szlifierki.....	395
64. Stotsko Z. A., Sokil B. I., Topilnytskyi V. H.: Mathematical model of mechanical system of vibrational volumetric treatment.....	401
65. Szwengier G., Surma S., Jastrzębski D.: Modelowanie i badania właściwości statycznych połączenia uchwytu narzędziowego z gniazdem wrzeciona obrabiarki	409
66. Timofiejczuk A.: Metoda identyfikacji uszkodzeń maszyny wirnikowej.....	415
67. Trawiński T., Pilch Z.: Badanie kinematyki i dynamiki aktuatorów głowic dysków twardych z zastosowaniem notacji Denavita-Hartenberga.....	421

Aleksander ŚLADKOWSKI, Katedra Transportu Szynowego, Politechnika Śląska

Marek SITARZ, Katedra Transportu Szynowego, Politechnika Śląska

Jerzy ŚLADKOWSKI, Katedra Transportu Szynowego, Politechnika Śląska

ANALIZA STANU NAPRĘŻEŃ ZĘBÓW KÓŁ PRZEKŁADNI ZA POMOCĄ MES

Streszczenie. W referacie rozpatrywane są problemy związane z modelowaniem współpracy kontaktowej przekładni zębatych. Opracowano metodykę rozwiązywania problemów. Przedstawiono przykład obliczeń stanu naprężeń przekładni zębatej lokomotywy elektrycznej EU07.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МКЭ

Аннотация. В статье рассматриваются проблемы, связанные с моделированием контактного взаимодействия зубчатых передач. Разработана методика решения таких задач. Приведен пример расчета напряженного состояния зубчатой передачи электровоза EU07.

1. WSTĘP

Dotychczas stosowane metody obliczeń przekładni zębatych, nie w pełni odwzorowywały realną geometrię kół zębatych. Zastosowanie współczesnych zasobów obliczeniowych i metod numerycznych mechaniki ciała sztywnego pozwala wyeliminować niedostatek wcześniejszych metod. Metoda elementów skończonych na obecny moment okazuje się najbardziej skutecznym podejściem dla rozwiązywania podobnych zadań. Przy całej dokładności samej metody postawienie zadania jest dostatecznie skomplikowane i potrzebuje stałego udoskonalenia.

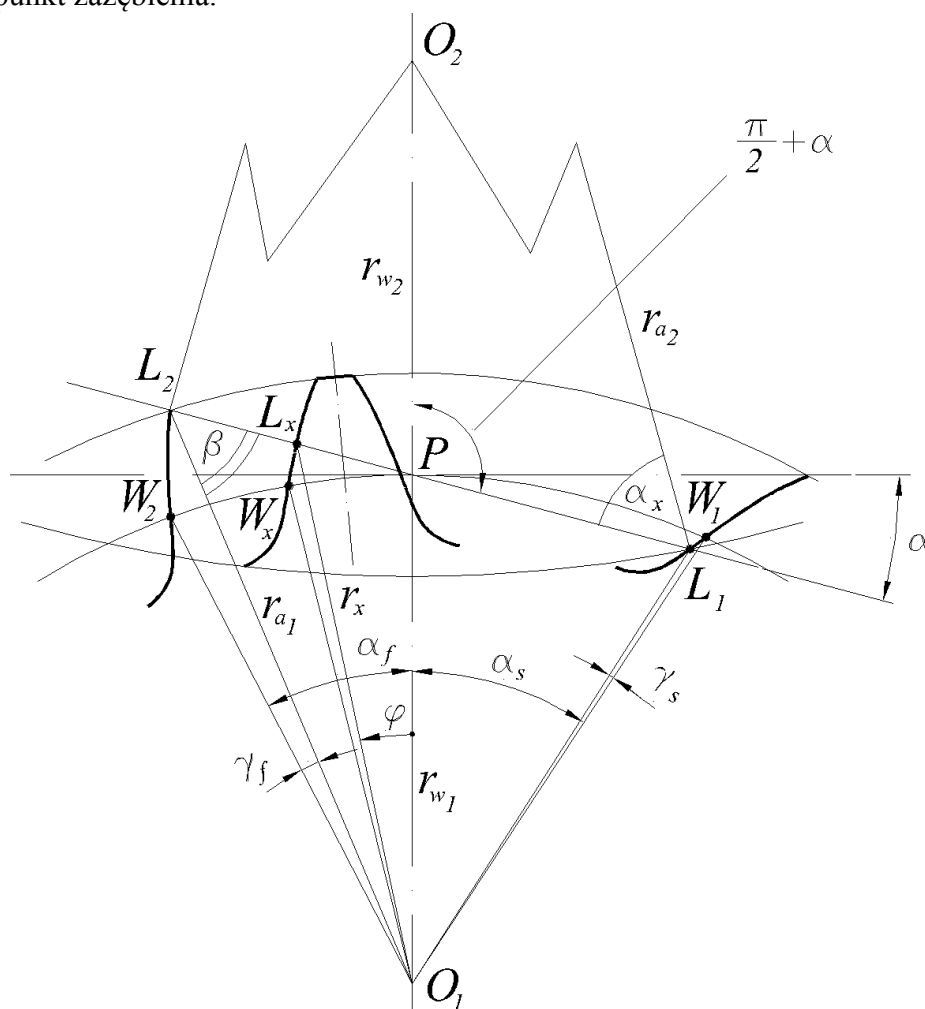
2. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Obecna praca jest przedłużeniem pracy [1] w której została przedstawiona metodyka obliczeń kontaktowej współpracy zębów przekładni, oparta na zastosowaniu MES. Przedstawiona wtedy metodyka z powodzeniem była zastosowana w przypadku dostatecznie dużej ilości elementów na ewolwentowych profilach zębów. Jednak dla przestrzennych zadań siłowego kontaktu zębów należy ograniczyć się do niewielkiej liczby elementów skończonych wzdłuż ewolwentowego profilu. Bazując na rezultatach pracy [2] dla zmniejszenia błędów obliczeń należy zabezpieczyć powstanie par węzłów kontaktowych.

Żeby rozwiązać ten problem należy określić początkowe i końcowe położenia rozpatrywanej kontaktowej pary zębów. Zatem trzeba zamodelować obrót zębownika od początkowego do końcowego położenia w taki sposób, żeby on obracał się o stały kąt obrotu.

Ogólna ilość obrotów zębnika musi odpowiadać zaplanowanej liczbie elementów na roboczej części profilu ewolwentowego. Przy tym dla każdego pośredniego położenia rozpatrywanych zębów punkty przecięcia bieżącego profilu i linii zazębienia będą określać położenie węzłów kontaktowych dla projektowanej siatki MES. W początkowym i końcowym położeniach zębów określa się dwa skrajne węzły na roboczej powierzchni ewolwenty. Na rys.1 pokazano modelowanie obrotu jednego zęba zębnika.

Dla jednoznacznego określenia bieżącego położenia profilu zęba należy przywiązać go do centralnego kąta powrotu profilu, wyznaczonemu po okręgu tocznym zębnika. Okrąg toczny wybieramy dlatego, że przy dowolnych parametrach przekładni tylko okręgi toczne stykają się ze sobą. Rozpatrzmy zęby zębnika. Robocza część linii zazębienia określona jest punktami L_1 i L_2 , które odpowiadają początkowemu (moment wejścia w kontakt) i końcowemu (moment wyjścia z zazębienia) położeniu zęba. Przy tym same położenia określony są kątami początkowym $\alpha_s = \angle W_1 O_1 P$ i końcowym $\alpha_f = \angle W_2 O_1 P$. Kąty te są centralnymi kątami okręgu tocznego zębnika, dlatego W_1 i W_2 - są punktami przecięcia profilu zęba z okręgiem tocznym zębnika dla odpowiednio początkowego i końcowego położenia, a P - centralny punkt zazębienia.



Rys. 1. Modelowanie obrotu jednego zęba zębnika

Kąty α_s i α_f mogą być znalezione jako suma kątów

$$\alpha_s = \angle PO_1 L_1 + \gamma_s, \quad \alpha_f = \angle PO_2 L_2 + \gamma_f. \quad (1)$$

Dla znalezienia przedstawionych kątów należy określić promienie okręgów tocznych kół

Problemy generacji siatki MES dla kół zębatych

r_{w1} i r_{w2} , ponieważ w przypadku niezerowego sumarycznego przesunięcia χ_Σ promienie okręgów podziałowego i tocznego nie są sobie równe [3]

$$r_{w1} = \frac{mz_1 \cdot \cos(\alpha_d)}{2 \cdot \cos(\alpha)}, \quad r_{w2} = \frac{mz_2 \cdot \cos(\alpha_d)}{2 \cdot \cos(\alpha)}, \quad (2)$$

gdzie m - moduł zębów, z_1 - liczba zębów zębnika, z_2 - liczba zębów koła zębatego, α_d - kąt profilu wyjściowego zarysu (przecięcia narzędzia płaszczyzną, prostopadłą do kierunku zębów), α - kąt zazębienia przekładni (dla korygowanych kół przy $\chi_\Sigma \neq 0$ $\alpha \neq \alpha_d$).

Kąt α_x wyznaczamy z wykorzystaniem teorii sinusów dla trójkąta PL_1O_2 (rys. 1)

$$\sin(\alpha_x) = \frac{r_{w2}}{r_{a2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \quad (3)$$

gdzie r_{a2} - promień wierzchołków zębów koła.

Długość części linii zazębienia od centralnego punktu zazębienia P do punktu L_1 znajduje się z wykorzystaniem teorii kosinusów

$$PL_1 = \sqrt{r_{w2}^2 + r_{a2}^2 - 2r_{w2}r_{a2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \alpha_x\right)}. \quad (4)$$

Teraz już z trójkąta PL_1O_1 , ponownie wykorzystując teorię kosinusów i już znaną wartość PL_1 , można określić odcinek O_1L_1

$$O_1L_1 = \sqrt{r_{w1}^2 + PL_1^2 - 2r_{w1}PL_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \quad (5)$$

po czym można wyznaczyć poszukiwany kąt $\angle PO_1L_1$ ze wzoru

$$\sin(\angle PO_1L_1) = \frac{PL_1}{O_1L_1} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (6)$$

Analogicznie wyznaczamy kąt

$$\angle PO_1L_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \arcsin\left[\frac{r_{w1}}{r_{a1}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right]. \quad (7)$$

Dodatkowe kąty γ_s i γ_f są wyznaczane z profilu zęba. Każdy z takich kątów powstaje pomiędzy dwoma promień-wektorami, prowadzonymi z punktu O_1 do dwóch punktów na ewolwentowym profilu, przy czym jeden z nich prowadzony jest do punktu W_i . Metodykę znalezienia dodatkowych kątów może wyjaśnić rys. 2, który przedstawia powiększony obraz zęba zębnika w bieżącym położeniu, który określony jest kątem φ . Poszukiwany kąt γ_x może być znaleziony jako połowa różnica kątów η_w i η_x

$$\gamma_x = \frac{1}{2}(\eta_w - \eta_x), \quad (8)$$

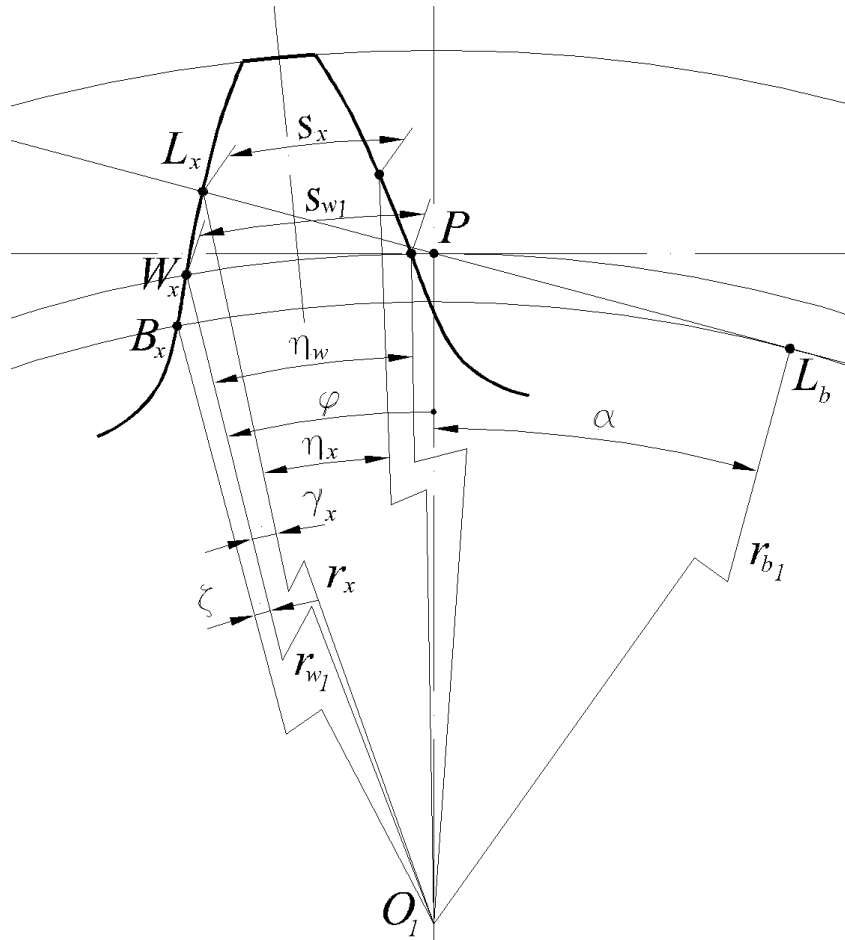
które wyznacza się jako stosunek odpowiedniej grubości zęba do promienia zawartego pomiędzy środkiem obrotu a punktem na ewolwentowym profilu

$$\eta_w = \frac{s_{w1}}{r_{w1}}, \quad \eta_x = \frac{s_x}{r_x}. \quad (9)$$

Dla znalezienia grubości zęba s_x można wykorzystać znany wzór [4]

$$s_x = \left\{ \frac{s_{d1}}{r_{d1}} - 2 \left[\operatorname{inv} \left(\arccos \frac{r_{b1}}{r_x} \right) - \operatorname{inv}(\alpha_d) \right] \right\} \cdot r_x, \quad (10)$$

gdzie r_x - bieżący promień na ewolwentowym profilu, r_{d1} - promień okręgu podziałowego zębniaka, s_{d1} - szerokość zęba na okręgu podziałowym, r_{b1} - promień okręgu zasadniczego.



Rys. 2. Wyznaczenie kątów dodatkowych

Grubość zęba s_{w1} wyznaczona jest analogicznie. Dla określenia rozpatrywanych dodatkowych kątów γ_s i γ_f jako bieżący promień r_x należy wykorzystać określony wcześniej odcinek O_1L_1 i promień wierzchołków zębów zębniaka r_{d1} . Z tego wynika, że kąty początkowy α_s i końcowy α_f zostały wyznaczone.

Punkty L_x dla każdego poszczególnego położenia profilu będą określać rozmieszczenie węzłów projektowanej siatki MES. Przy tym samo położenie profilu określa się kątem powrotu φ , przedstawionym na rys. 1. Kąt φ zmienia się od $-\alpha_s$ do α_f z przyrostem Δ , który można określić ze wzoru

$$\Delta = \frac{\alpha_s + \alpha_f}{n}, \quad (11)$$

gdzie n – ilość elementów wzdłuż roboczej części profilu ewolwentowego, zadawanego we wstępnym menu programu.

Dla znalezienia współrzędnych węzłów siatki MES wyznaczamy promienie r_x punktów L_x dla poszczególnych położений zębów. Z trójkąta $L_xL_bO_1$ można wyznaczyć

$$r_x = \sqrt{L_xL_b^2 + r_{b1}^2}, \quad (12)$$

gdzie r_{b1} - promień okręgu zasadniczego zębniaka.

Problemy generacji siatki MES dla kół zębatych

Dla wyznaczenia odcinku $L_x L_b$ wykorzystujemy właściwość ewolwenty $L_x L_b = \cup B_x L_b$. Dla wyznaczenia długości łuku na okręgu zasadniczym $\cup B_x L_b$ należy określić kąt pomiędzy promieniami $O_1 B_x$ i $O_1 L_b$

$$\angle B_x O_1 L_b = \alpha + \varphi + \zeta, \quad (13)$$

gdzie dodatkowy kąt ζ wyznacza się według opisanej powyżej metodyki z wykorzystaniem wzoru (8). Znalezienie tego kąta jest analogiczne znalezieniu kąta γ_x , dlatego należy tylko zamienić punkt L_x na B_x .

Graniczne węzły siatki MES tworzone są dla centralnego położenia zęba zębniaka. Przy założeniu że ząb znajduje się w centralnym położeniu i jest symetryczny odnośnie osi rzędnych, zakładamy także, że węzeł będzie znajdował się w punkcie profilu, którego promień r_x znaleziono wcześniej. Wtedy współrzędne punktu na profilu można znaleźć z trójkąta prostokątnego gdzie r_x - przeciwprostokątna. Ostry kąt ψ z wierzchołkiem w środku obrotu zębniaka wyznaczany jest jako

$$\psi = \frac{s_x}{2} r_x, \quad (14)$$

skąd współrzędny punktu kontaktowego na profilu można wyznaczyć jako

$$x = r_x \sin(\psi), \quad y = r_x \cos(\psi). \quad (15)$$

Zgodnie z opisanym wyżej modelowaniem obrotu zębów zębniaka obliczenia powtarzają się tyle razy, ile węzłów założono na roboczej części profilu ewolwentowego. Następnie wykonywany jest zapis do neutralnego pliku profilu zęba, składającego się z węzłowych punktów. Niestety, pracować z profilem zadany punktowo jest trudno, dlatego należy wykorzystać splajny Beziera, procedura generacji których została dokładnie opisana w pracy [1].

Automatyczną generacją siatki MES wzdłuż dowolnej krzywej steruje parametr, nazwany Bias Factor, który przedstawia sobą stosunek maksymalnej długości łuku do minimalnej przy podziale granicznej krzywej na oddzielni łuki. Dla poszukiwanego splajna Bias Factor można łatwo znaleźć wg wzoru

$$b_s = \frac{\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad (16)$$

gdzie x i y bierze się z indeksami, odpowiadającymi 4-em skrajnym punktom roboczej części ewolwenty.

Przy tworzeniu splajna średni kontrolny punkt znajduje się w taki sposób, który został opisany w pracy [1]. Jednak przy tym otrzymuje się splajn który, niestety posiada pewne różnice z realnym profilem zęba. Przy istniejących różnicach ząb staje się szerszy niż jest w rzeczywistości, co jest niedopuszczalne, ponieważ może spowodować „zakleszczanie” się przy modelowaniu pracy przekładni. Dlatego został stworzony specjalny algorytm, który w obliczeniowym programie przeprowadza korekcją splajnu za pomocą zmiany współrzędnych średniego kontrolnego punktu jeszcze przed zapisem go w neutralny plik. Zgodnie z tym algorytmem przeprowadza się analiz odległości między odpowiednimi „węzłowymi” punktami, rozmieszczonymi na splajnie Beziera i realnymi punktami profilu. Znajduje się para punktów, pomiędzy którymi jest największa odległość, t. j. największy błąd tworzenia. Zatem średni kontrolny punkt przemieszcza się w kierunku wektora między „węzłowym” punktem a odpowiadającym punktem na profilu. Wielkość przemieszczenia korygowana jest przy pomocy współczynnika, otrzymanego w wyniku przeprowadzonego numerycznego eksperymentu. Maksymalny błąd modelowania geometrycznego nie przekracza 0,3% od modułu.

Algorytm wykorzystany do generacji siatki MES koła zębatego jest analogiczny jak opisany powyżej dla zębniaka.

Po wprowadzeniu parametrów przekładni do programu „Teeth ver.2.4” otrzymano geometryczne modele zębatych sektorów dla koła i zębniaka oddzielnie, które zapisano w neutralnych plikach (*.neu). W oparciu o te źródła utworzono w programie MSC.NASTRAN siatkę MES, a następnie wyeksportowano do programu MSC.MARC, gdzie przeprowadzono ostateczne obliczenia przekładni. Otrzymane wyniki można wizualizować przy pomocy pliku wideo o formacie avi. Oddzielne klatki otrzymanego filmu wideo pokazano na rys. 3; w przedstawionym przypadku analizowano stan naprężeń (ekwiwalentny naprężenia przedstawiono zgodnie z kryterium Mizesa-Hubera-Henki) dla przekładni napędowej lokomotywy EU07.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń można sformułować wniosek, że opracowana metodyka MES badania naprężeniowo-deformacyjnego stanu przekładni o zębach prostych jest dokładniejsza od dotychczasowych.

Metodyka ta może być efektywnie wykorzystana do analizy pracy przekładni napędowych lokomotyw, młynów przemysłowych i w innym sprzęcie.



Rys. 3. Przykład otrzymanego stanu naprężeń zębów przekładni napędowej lokomotywy EU07 z wykorzystaniem proponowanej metodyki modelowania

3. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonych badań można wysunąć następujące wnioski.

Opracowana metoda pozwala przeprowadzać generowanie siatek elementów skończonych dla kół zębatach, minimalizując błędy obliczeniowe. Podstawą tej metody jest stworzenie zgodnych siatek dla współpracujących zębów. Dokładność siatek generowanych wg tej metodyki była sprawdzona w wyniku numerycznych eksperymentów. Na podstawie prowadzonych badań otrzymano przykłady obliczeń MES stanu naprężeń kół zębatach, zgodne z obowiązującymi normami.

LITERATURA

- [1] Śladkowski A., Sitarz M., Śladkowski J. Research of the Stresses in the Large-Grain Gearings // Research and Development in Mechanical Industry / Proceedings of 3rd Int. Conf. RaDMI 2003. – Herceg Novi, Serbia and Montenegro: Institute IMK “14.Oktober”, 2003. – P. 1451 – 1455.
- [2] Śladkowski A., Kuminek T. Influence of the FE Discretization on Accuracy of Calculation of Contact Stress in a System Wheel – Rail // Proceedings 3rd Scientific Conference of Jan Perner Transport Faculty “New Trends in Transport and Communications”. – Pardubice: University of Pardubice, 2003. – P. 13 – 18.
- [3] Артаболевский И.И. Курс теории механизмов и машин. – М.: ОГИЗ, 1945. – 450 с.
- [4] Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584 с.