

**POLITECHNIKA ŚLĄSKA
KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ**

**ZESZYTY NAUKOWE
KATEDRY MECHANIKI STOSOWANEJ**

**XLII
SYMPOZJON
PTMTS**

**MODELOWANIE
W
MECHANICE**

GLIWICE 2003

**20
2003**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
WYDZIAŁ MECHANICZNY TECHNOLOGICZNY
KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ

ZESZYTY NAUKOWE
KATEDRY MECHANIKI STOSOWANEJ

zeszyt nr 20

XLII
SYMPOZJON
PTMTS

MODELOWANIE
W
MECHANICE

10-14 LUTEGO 2003

GLIWICE 2003

40. Kukla S.: Identyfikacja sztywności połączeń sprężystych członów wysięgnika teleskopowego na podstawie częstości drgań swobodnych wysięgnika	244
41. Lasek M., Złocka M., Żugaj M.: Modelowanie i realizacja techniczna urządzeń wspomagających kaskaderskie efekty specjalne	250
42. Lasek M., Złocka M., Żugaj M.: Modelowanie sterowanego lotu ornitoptera w burzliwej atmosferze.....	256
43. Lehrich K., Kosmol J.: Badania modelowe pasa zębatego przekładni pasowej metodą elementów skończonych	262
44. Ładyżyńska-Kozdraś E., Wolski K.: Równania Maggiego w modelowaniu matematycznym ruchu końcówki chwytnej manipulatora	268
45. Mańka I., Tejszerska D.: Próba weryfikacji przyczyn powstawania bocznego skrzywienia kręgosłupa na podstawie jego modelu	276
46. Marchelek K., Pajor M., Bodnar A.: Badania symulacyjne nieliniowego procesu skrawania przy frezowaniu walcowo-czołowym. Część I: nieliniowy model systemu 0-PS	282
47. Maryniak J.: Modelowanie i badanie stateczności jachtu żaglowego klasy „FINN”	288
48. Mężyk A., Kaczmarczyk J.: Kształtowanie cech dynamicznych stojana generatora	296
49. Milewski J., Miller A.: Koncepcja budowy modelu ogniwa paliwowego SOFC	302
50. Miller K.: Biomechanics of brain for computer assisted surgery	309
51. Ondrouch J.: The use of structural intensity measurements for identification of vibration sources	315
52. Paczos P., Zielnica J.: Analityczno-numeryczna metoda rozwiązania nieliniowego problemu stateczności otwartej dwuwarstwowej powłoki stożkowej.....	319
53. Pajor M., Marchelek K., Bodnar A.: Badania symulacyjne nieliniowego procesu skrawania przy frezowaniu walcowo-czołowym. Część II: symulacje komputerowe	325
54. Palacz M.: Optymalizacja strukturalna i monitorowanie uszkodzeń - pierwszy etap projektu	333
55. Pilch Z., Kluszczyński K.: Wpływ momentów przemiennych silnika indukcyjnego klatkowego na cykle obciążenia zębów przekładni zębatej.....	339
56. Piwowarski M.: Wpływ struktury warstwowej na przewodnictwo cieplne w kompozytach periodycznych.....	345
57. Plezia R., Grzejda R.: Hybrydowa metoda modelowania w mechanice konstrukcji – sprzężenie programów DADS oraz ANSYS.....	351
58. Posiadała B.: Drgania swobodne kolumny złożonej z elementami dodatkowymi.....	357
59. Składzień J., Hanuszkiewicz – Drapała M., Fic A.: Modelowanie procesów cieplnych w gruntowym wymienniku ciepła pompy grzewczej z elementami Fielda.....	363
60. Sładkowski A., Sitarz M., Sładkowski J.: Problemy generacji siatki MES dla kół zębatych	369
61. Szabelski K., Warmiński J.: Drgania parametryczno-samowzбудne układów mechanicznych	375
62. Szyk W., Wasilewicz P., Zielnica J., Walczak J.: Poszukiwanie optymalnego kształtu tarczy wirnika sprężarki	387
63. Toszek L., Kosmol J.: Modelowanie rozprywu ciepła, naprężeń termicznych i mechanicznych w wiertle krętym metodą elementów skończonych	393

Aleksander ŚLADKOWSKI, Katedra Transportu Szynowego, Politechnika Śląska
Marek SITARZ, Katedra Transportu Szynowego, Politechnika Śląska
Jerzy ŚLADKOWSKI, Ukraiński Państwowy Uniwersytet Chemiczny - Technologiczny

PROBLEMY GENERACJI SIATKI MES DLA KÓŁ ZĘBATYCH

Streszczenie. W pracy rozpatrzono nową metodykę dla przedstawienia geometrii modelu ewolwentowego koła zębatego w MES przy użyciu jako tworzących zarys, krzywych złożonych „spline line” Bezier’a. Zaletą otrzymanego modelu jest to, że dopuszcza dostatecznie prosty algorytm dyskretyzacji ES zarówno rozpatrywanego zarysu jak i całego obszaru.

ПРОБЛЕМЫ ГЕНЕРАЦИИ КЭ-СЕТКИ ДЛЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Аннотация. В данной статье рассматривается новая методика для образования геометрии конечно-элементной модели эвольвентного зубчатого колеса с использованием в качестве образующих кривых контура сплайнов Безье. Преимущество полученной геометрической модели заключается в том, что она допускает достаточно простую алгоритмизацию КЭ-дискретизации как рассматриваемого контура, так и области в целом.

1. WSTĘP

Wielu różnych uczonych prowadziło badania nad zachowaniem się pojedynczych zębów różnych kół zębatach pod wpływem przyłożonego do nich obciążenia. We współczesnej literaturze problem kontaktowej współpracy dwóch kół zębatach jest rzadko rozpatrywany [1,2]. Chcąc opisać wzajemne oddziaływanie dwóch kół zębatach na siebie należy rozpatrzeć zazębienie dwóch par zębów jednocześnie. Dla większości przekładni zębatach więcej niż 50% czasu pracy przypada na zazębienie dwóch par zębów. W przeciwnym przypadku pojawiają się dodatkowe obciążenia dynamiczne. W celu otrzymania poprawnych wyników, wybrano segmenty składające się z trzech zębów. Większa ilość zębów w segmencie wpływać będzie negatywnie na dokładność wyników obliczeń, ponieważ przyrost ilości elementów prowadzi do nagromadzenia błędów związanych z zaokrągleniem otrzymywanych wyników przez algorytm programu wykorzystujący metodę elementów skończonych [3]. Prowadzi to również do nieoczekiwanego zwiększenia czasu obliczeń. Dla uproszczenia rozwiązania wyżej opisanego problemu opracowano program, którego rezultatem obliczeń jest zapisanie w neutralnym pliku geometrii segmentu, który składa się z jednego zęba centralnego i dwóch sąsiednich dla konkretnego koła zębatego (napędzającego lub napędzanego). Program Teeth, opracowano we współczesnym języku programowania IBASIC. Podstawą jego jest praca [4,5], a teoretyczne podstawy ewolwentowego zazębienia zostały zaczerpnięte z pracy [6].

2. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Jako dane początkowe dla opracowanego programu muszą być zaznaczone: moduł zęba, liczba zębów i współczynniki korekcji początkowego konturu dla kół zębatych napędzanych i napędnych. W wyniku obliczeń otrzymujemy profil jednego zęba zadany punktowo, co nie jest wygodne dla dalszych prac (otrzymane punkty trzeba połączyć w krzywe w celu dalszego eksportowania i tworzenia modelu MES). Ten krok zależy od dalszego opracowania pliku neutralnego z wynikami obliczeń programu. Z tego powodu, że dla dalszej pracy został wybrany pre/postprocesor FEMAP kształt krzywych końcowych, jakie trzeba wykorzystać dla aproksymacji otrzymanych wcześniej punktów konturu zęba ewolwentowego trzeba wybrać wśród dostatecznie ograniczonego asortymentu matematycznych krzywych. To jest linii prostych (oczywiście profil stworzony z odcinków linii prostych tylko przypomina realny profil i dlatego nie może być wykorzystany w tej pracy), łuki okręgów (bardziej prawidłowy kształt krzywych zastępujących realny kontur, jednak wynika problem wyznaczenia promienia krzywych z tego powodu, że on musi być zmienny, stąd wynika problem wyznaczenia współrzędnych środków łuków). Także możliwy eliptyczny, paraboliczny i hiperboliczny kształt krzywych aproksymujących, jednak każda z nich ma kilka wad, które nie pozwalają na ich wykorzystanie. Wybrane zostały specjalne krzywe mające nazwę nierównomiernych racjonalnych krzywych Bezier'a - Non Uniform Rational Bezier Splines (NURBS). Jednak w tym wypadku kiedy liczba punktów składa się z więcej niż 100 punktów na jeden ząb (jak zostało wyżej wyznaczone – liczba zębów musi wynosić przynajmniej trzy), proces ten staje się bardzo pracochłonny a nawet niemożliwy.

Rozwiązać ten problem udało się przy bardziej szczegółowym rozpatrzeniu struktury krzywych Bezier'a. Krzywe te bywają kilku rodzajów. Jak pokazała analiza dokumentacji technicznej zwykle krzywe Bezier'a to są krzywe trzeciego rzędu. Jednak bywają uproszczone krzywe drugiego rzędu, które są szczególnym przypadkiem skomplikowanych wielopunktowych NURBS. Dla ich tworzenia wystarczy mieć tylko trzy punkty kontrolne przy czym przy prawidłowym zadaniu punktów kontrolnych dla uproszczonych krzywych różnica pomiędzy otrzymanymi krzywymi jest na tyle mała że można ją pominąć bez żadnej straty dla rozpatrywanego modelu. Jak wiadomo okręgi, elipsy, parabole i hiperbole są przekrojami stożka, które można matematycznie wyznaczyć jako funkcję drugiego rzędu. Bardzo korzystną właściwością uproszczonych krzywych Bezier'a jest to, że w zależności od położenia współrzędnych punktów kontrolnych krzywe te mogą być jakimkolwiek przekrojem stożkowym, z tego powodu, że te ostatnie są szczególnym przypadkiem krzywych Bezier'a. Główną przyczyną wyboru uproszczonych krzywych Bezier'a jest możliwość dalszego matematycznego opracowania dla otrzymania np. dokładnej liczby długości krzywych itd.

Trzypunktowe krzywe Bezier'a są krzywymi drugiego rzędu, dla których matematyczna zależność tensora $\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$ może być przedstawiona w postaci

$$\{P(t)\} = (1-t)^2 \{P_0\} + 2t(1-t) \{P_1\} + t^2 \{P_2\}, \quad (1)$$

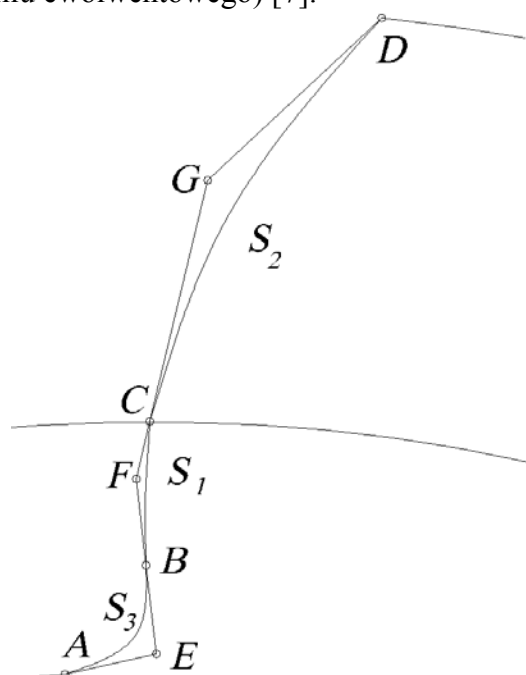
gdzie parametr t zmienia się w przedziałach $0 \leq t \leq 1$.

Początkowo trzeba było założyć jaka ostateczna liczba krzywych będzie narysowana dla rozpatrywanego w pierwszej kolejności centralnego zęba. Jak wykazały eksperymenty numeryczne dla generacji krzywej przejściowej AB (rys. 1) wystarczy jedna trzypunktowa krzywa Bezier'a. Jednak robocza ewolwentowa powierzchnia zęba musi być podzielona z tego powodu, że w celu opracowania prawidłowej współpracy kontaktowej, potrzebne są punkty, które zagwarantują kontakt. Tymi punktami mogą być punkty zazębienia i skrajne punkty profilu ewolwentowego dla sąsiednich zębów. Dlatego podjęto decyzje o podziale

Problemy generacji siatki MES dla kół zębatach

profilu ewolwentowego na dwa odcinki – od dolnego punktu roboczego B do specjalnie obliczonego punktu C , który znajduje się w punkcie przecięcia koła podziałowego z profilem ewolwentowym i dalej od punktu C do punktu D , który jednocześnie należy do profilu ewolwentowego i koła wierzchołkowego.

W celu narysowania powyższych krzywych potrzebne są trzy punkty kontrolne z których dwa są skrajnymi punktami krzywej aproksymującej a trzeci leży na przecięciu dwóch linii prostych dotyczących profilu w skrajnych punktach rozpatrywanego odcinka profilu (na rys. 2 przedstawiono punkty E, F, G , odpowiednio dla krzywych opisujących krzywą przejściową, dolnej i górnej części profilu ewolwentowego) [7].



Rys. 1. Sposób rysowania trzypunktowych krzywych Bezier'a

W tym przypadku, matematycznie dla odpowiednich łuków krzywych, punkty kontrolne będą wyznaczone jak wektory wodzące rozpatrywanych powyżej punktów.

$$\begin{aligned} \cup S_1 : \{P_0\} = \bar{B} = \{x_B, y_B\}^T, \quad \{P_1\} = \bar{F} = \{x_F, y_F\}^T, \quad \{P_2\} = \bar{C} = \{x_C, y_C\}^T \\ \cup S_2 : \{P_0\} = \bar{C} = \{x_C, y_C\}^T, \quad \{P_1\} = \bar{G} = \{x_G, y_G\}^T, \quad \{P_2\} = \bar{D} = \{x_D, y_D\}^T \\ \cup S_3 : \{P_0\} = \bar{A} = \{x_A, y_A\}^T, \quad \{P_1\} = \bar{E} = \{x_E, y_E\}^T, \quad \{P_2\} = \bar{B} = \{x_B, y_B\}^T \end{aligned}$$

W praktyce w celu znalezienia współrzędnych jakiegokolwiek średniego kontrolnego punktu trzeba znaleźć rozwiązanie układu równań wyżej ukazanych linii prostych w następującym kształcie

$$\begin{cases} y - y_1 = k_1(x - x_1) \\ y - y_2 = k_2(x - x_2) \end{cases} \quad (2)$$

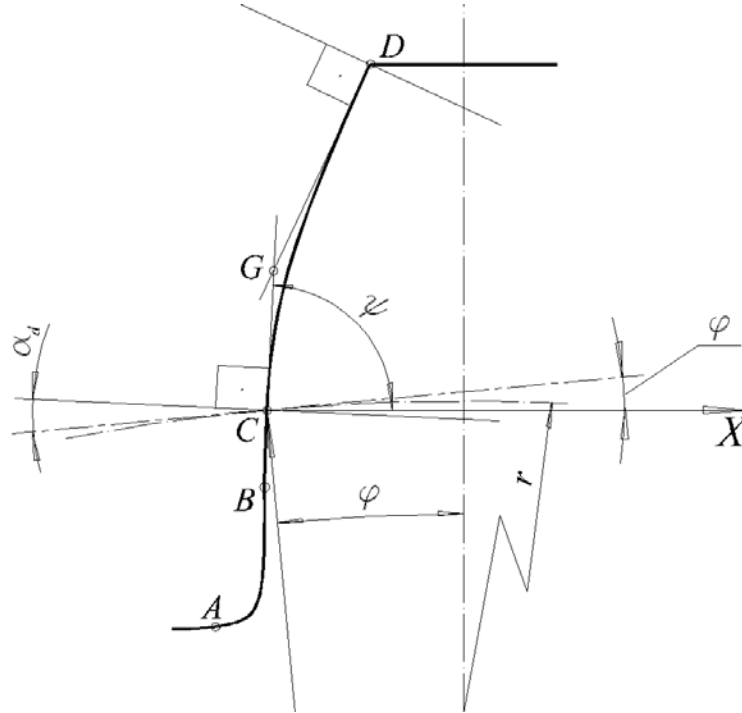
gdzie k_1 i k_2 – tangensy kątów pochylenia odpowiednich linii prostych, a (x_1, y_1) i (x_2, y_2) – współrzędne skrajnych punktów kontrolnych.

Dla wyznaczenia rozpatrywanych kątów trzeba wykorzystać wyznaczone kąty kierunku nacisku w punktach B, C i D . Kąt kierunku nacisku to jest kąt, który składa się z linii prostopadłej do profilu zęba dla konkretnego punktu profilu z linią prostą dotykającą okręgu o odpowiednim promieniu (np. dla punktu C to jest promień koła podziałowego). W wyniku

czego, jeżeli wziąć np. górną część profilu ewolwentowego (rys. 3.) to kąt pochyłu linii stycznej do profilu w punkcie C przedstawia wzór

$$\psi = \frac{\pi}{2} - (\alpha_d - \varphi), \quad (3)$$

gdzie α_d - kąt kierunku nacisku w punkcie C , a $\varphi = \arctan \frac{x_C}{y_C}$ - odpowiedni kąt środkowy.



Rys. 2. Geometryczne wyznaczenie kąta nachylenia ψ linii stycznej do profilu w punkcie C

Wtedy ostatecznie wyznaczamy współczynniki

$$k_1 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_d - \arctan \frac{x_C}{y_C}\right), \quad k_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{a1} - \arctan \frac{x_D}{y_D}\right), \quad (4)$$

gdzie α_{a1} - kąt kierunku nacisku na wierzchołek zęba. Zmiana znaku przed arctangensami związana z ujemnym znakiem współrzędnej X dla wszystkich rozpatrywanych punktów.

W takim wypadku jeżeli obliczone są współczynniki k_1 i k_2 , można rozwiązać układ równań (2). W wyniku czego współrzędne średniego punktu kontrolnego dla krzywych Bezier'a wyznaczają następujące wzory

$$x = \frac{k_1 x_1 - k_2 x_2 - y_1 + y_2}{k_1 - k_2}, \quad y = \frac{k_1 k_2 x_1 - k_1 k_2 x_2 + k_1 y_2 - k_2 y_1}{k_1 - k_2}. \quad (5)$$

Np. po ostatecznym podstawieniu zmiennych, współrzędne punktu kontrolnego G wyznaczamy zgodnie ze wzorami

$$x_G = \frac{k_1 x_C - k_2 x_D - y_C + y_D}{k_1 - k_2}, \quad y_G = \frac{k_1 k_2 (x_C - x_D) + k_1 y_D - k_2 y_C}{k_1 - k_2}. \quad (6)$$

Analogicznie wyznaczamy współrzędne średniego punktu kontrolnego F dla dolnej części rozpatrywanego profilu ewolwentowego.

Dla ostatniej krzywej Bezier'a, która aproksymuje krzywą przejściową taki sposób znalezienia średniego punktu kontrolnego niestety nie jest możliwy dlatego, że dla skrajnego punktu A krzywej przejściowej kąt kierunku nacisku nie istnieje. W tym przypadku można skorzystać z równań linii prostych, które można narysować po znanych współrzędnych dwóch

Problemy generacji siatki MES dla kół zębatych

punktów. Tymi punktami są co najmniej dwie skrajne punkty konturu z każdej strony krzywej przejściowej. Dla uproszczenia na rys. 3. pokazano schematycznie rysunek krzywej przejściowej, który może być tylko przy bardzo podciętym zębie co nie występuje w rzeczywistości.

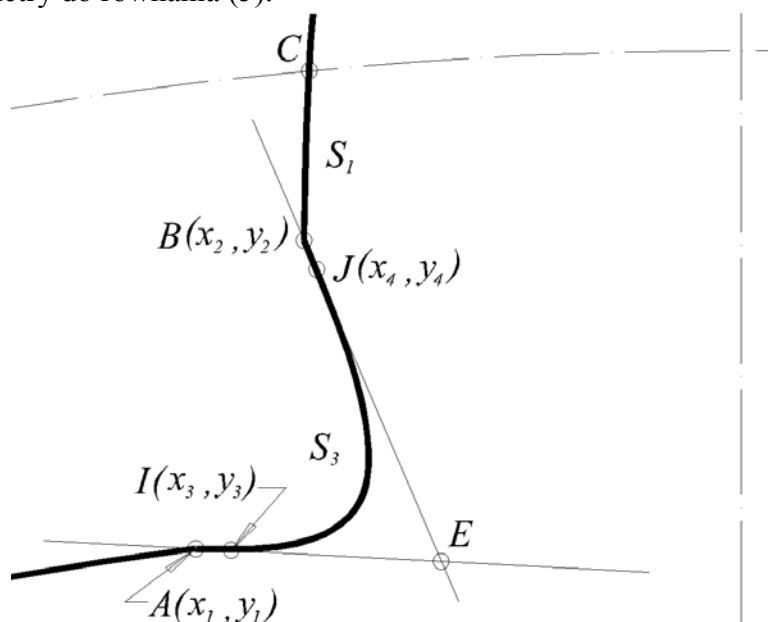
W takim wypadku układ równań dla znalezienia punktu E można zapisać w postaci

$$\begin{cases} \frac{y-y_1}{y_3-y_1} = \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \\ \frac{y-y_2}{y_4-y_2} = \frac{x-x_2}{x_4-x_2} \end{cases} \quad (7)$$

W tych równaniach, analogicznie do poprzedniego układu (2), przy pomocy matematycznego przekształcenia można otrzymać

$$k_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \quad k_2 = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}.$$

Znając te współczynniki, można znaleźć współrzędne punktu E wystarczy podstawić potrzebne parametry do równania (5).



Rys. 3. Wyznaczenie współrzędnych średniego punktu kontrolnego dla krzywej przejściowej przy pomocy metod geometrii analitycznej

Wyznaczenie łuków okręgów wierzchołków i dna wrębów może się odbyć przy pomocy zapisu do pliku wynikowego w określonym porządku czterech numerów punktów z których jeden jest środkiem okręgu a trzy pozostałe leżą na łuku okręgu.

3. WYNIKI MODELOWANIA

W wyniku przeprowadzonych operacji można wyznaczyć plik danych opisujący profil jednego zęba stworzony z krzywoliniowych odcinków. Dla zakończenia modelowania geometrycznego segmentu zębatego pozostało wykonać trzy działania: powtórzyć rysowanie profilu sąsiednich zębów, narysować „ciało” segmentu zębatego oraz połączyć wszystkie krzywe w jedną powierzchnię graniczną (rys. 4).

Po zaimportowaniu geometrii segmentu zębatego do FEMAP trzeba dokonać sprawdzenia dokładności krzywych Bezier'a aby uzyskać informacje o prawidłowości wyboru ukazanych

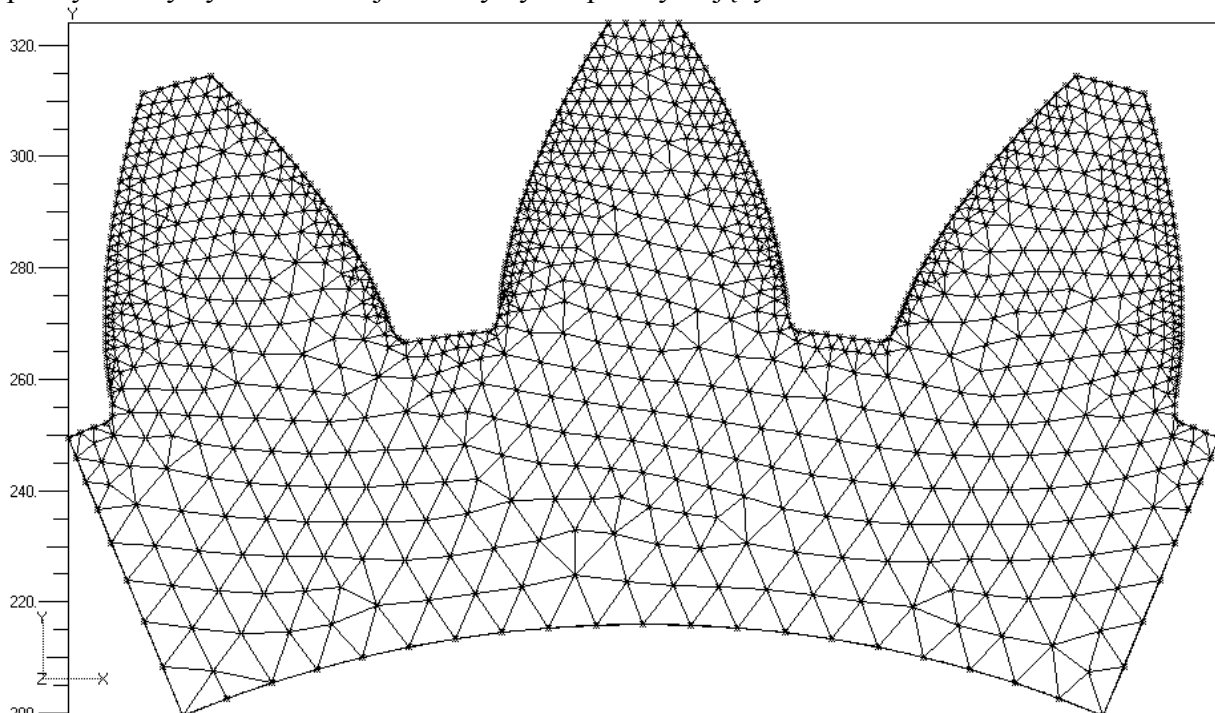
krzywych. Np. rozpatrywano górny odcinek profilu ewolwentowego, który ma największą niedokładność z tego powodu, że ten odcinek ma największą długość. W wyniku czego na $\cup S_2$ niedokładność dla punktu średniego mierzona jako odległość po linii prostopadłej poprowadzonej z realnego punktu profilu na krzywą aproksymującą wyniosła (dla modułu $m = 24 \text{ mm}$) $\delta = 0,02 \text{ mm}$.

Jeśli odnieść wyznaczony błąd do modułu można zauważyć, że

$$\delta = 9,08 \times 10^{-4} m, \quad (8)$$

gdzie m – moduł rozpatrywanego koła zębatego.

Z powyższych rozważań nasuwa się wniosek o prawidłowości początkowego wyboru prostych krzywych Bezier'a jako krzywych aproksymujących.



Rys. 4. Dyskretyzacja ES segmentu zębatego

W taki sposób teraz można programowo zadawać geometrie rozpatrywanego segmentu zębatego opisując odpowiednie krzywe przy pomocy krzywych Bezier'a i łuków okręgów. Następnie krzywe te łączymy w jedną powierzchnię graniczną. Otrzymane informacje zapisywane są do pliku danych, który importujemy do NASTRANA gdzie tworzymy model MES rozpatrywanej strefy koła zębatego.

4. WNIOSKI I KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ

Na podstawie prowadzonych badań można wysunąć następujące wnioski.

Opracowana metoda pozwala prowadzić racjonalną generację siatek elementów skończonych dla kół zębatych. W podstawie tej metody jest założone wykorzystanie trzypunktowych krzywych Bezier'a w celu opisanie geometrii przekładni zębatych. Dokładność generowanej w taki sposób geometrii była sprawdzona i na podstawie prowadzonych badań opracowano przykłady siatek MES.

W dalszych badaniach przewiduje się przeprowadzenie obliczeń współpracy kontaktowej dla różnych przekładni zębatych przy zmianie kąta obrotu kół. Przy takich badaniach oprócz rozkładu naprężeń będą obliczone sztywności przekładni zębatej w zależności od kąta obrotu.

LITERATURA

- [1] Dietrych J., Korewa W., Kornberger Z., Zygmunt K. Podstawy konstrukcji maszyn. – Warszawa: WNT, 1971. – V.3. – 488 s.
- [2] MackAldener M. Tooth Interior Fatigue Fracture & Robustness of Gears. – Stockholm: Royal Institute of Technology, 2001. – 49 p.
- [3] Zienkiewicz O.C. Metoda elementów skończonych. – Warszawa: Arkady, 1972. – 458 s.
- [4] Сладковский А.В., Мушенков Ю.А., Сладковский Ю.А. Исследование прочности скорректированных зубьев эвольвентных передач с использованием MSC/ NASTRAN for Windows // Вторая Российская конференция пользователей MSC. – М.: Постоянное представительство MSC.Software Corporation в СНГ, 1999. – С.1-6.
- [5] Сладковский А.В., Виноградов Б.В. Исследование напряженного состояния зубьев крупногабаритных передач при помощи ППП MSC/NASTRAN // Повышение эффективности применения передовых компьютерных технологий инженерного анализа фирмы MSC.Software на предприятиях России, Белоруссии, Украины / Третья Российская конференция пользователей MSC. – М.: Постоянное представительство MSC.Software Corporation в СНГ, 2000. – С. 1-8.
- [6] Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584 с.
- [7] Sładkowski J. Geometrical modeling of involute gearing // Proc. Int. Conf. „Mechanika – 2003”. – Kaunas: Technologija, 2003. – P. 107 – 114.